Exercice 1 – Convolution et support compact.

a) Soient $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ avec g à support compact. Montrer que la fonction $f * g$ est dérivable et de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

b) Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et φ continue, positive, à support compact et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. On pose $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$. Montrer que $(\varphi_n * f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

Commentaires. Comme pour le théorème 3.57, la démonstration de la question **a** repose sur l'utilisation du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Observez cependant que la domination donnée dans la preuve du théorème 3.57 n'est pas suffisante ici puisque f n'est que localement intégrable. Pour l'affiner, on utilise la compacité du support de g. Pour la question **b**, on adapte la preuve du théorème 3.63 en découpant l'intégrale en deux parties : la première partie (autour de 0) exploite la continuité de f ; la seconde se majore grâce aux propriétés de φ_n (pour n grand).

Corrigé.

a) Formons le taux d'accroissement

$$\mathrm{R}_h(x) = \frac{1}{h}((f*g)(x+h) - (f*g)(x)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h} f(t)\,(g(x+h-t) - g(x-t))\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout x et tout $h \neq 0$, la fonction $t \mapsto h^{-1}f(t)\,(g(x+h-t)-g(x-t))$ est mesurable. De plus,

$$h^{-1}f(t)\,(g(x+h-t)-g(x-t)) \xrightarrow[h\to 0]{} f(t)g'(x-t).$$

Il reste à vérifier l'hypothèse de domination pour pouvoir utiliser le théorème de convergence dominée. Soient a, b tels que $\operatorname{Supp} g \subset [\,a\,,b\,]$ et $\mathrm{K} = [\,a-1\,,b+1\,]$. Se restreindre à $|h| \leqslant 1$ assure que le support des fonctions $g_{h,x} : t \mapsto g(x+h-t)$ reste inclus dans le compact $x - \mathrm{K}$ qui ne dépend pas de h. Vérifions alors que, pour tout $h \in \,]-1\,,1\,[\smallsetminus \{0\}$,

$$|h|^{-1}\,|f(t)\,(g(x+h-t)-g(x-t))| \leqslant |f(t)|\,\|g'\|_\infty \mathbf{1}_{\mathrm{K}}(x-t). \tag{$*$}$$

Si $x - t \notin \mathrm{K}$ alors $x - t \notin \operatorname{Supp} g$ et $x - t + h \notin \operatorname{Supp} g$, donc

$$|h|^{-1}\,|f(t)\,(g(x+h-t)-g(x-t))| = 0 = |f(t)|\,\|g'\|_\infty \mathbf{1}_{\mathrm{K}}(x-t).$$

Si $x - t \in \mathrm{K}$ alors $\mathbf{1}_{\mathrm{K}}(x-t) = 1$ et grâce à l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|h|^{-1}\,|f(t)\,(g(x+h-t)-g(x-t))| \leqslant |f(t)|\,\|g'\|_\infty = |f(t)|\,\|g'\|_\infty \mathbf{1}_{\mathrm{K}}(x-t).$$

Ainsi on dispose de $(*)$ pour tout $h \in \,]-1\,,1\,[\smallsetminus \{0\}$. Comme f est continue, $t \mapsto |f(t)|\|g'\|_\infty \mathbf{1}_{\mathrm{K}}(x-t)$ est intégrable et indépendante de h. Ainsi, le théorème de convergence dominé de Lebesgue [RUD, 1.34] assure que

$$\mathrm{R}_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x-t)\,\mathrm{d}t = (f*g')(x),$$

autrement dit, $f*g$ est dérivable en x et de dérivée $(f*g')(x)$.

b) La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une identité approchée. Comme φ_n est d'intégrale 1, on a

$$(\varphi_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\,(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$; la continuité de f en x permet de choisir η tel que

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour } |t| \leqslant \eta.$$

Ainsi, φ_n étant positive, on a

$$|(\varphi_n * f)(x) - f(x)| \leqslant \int_{|t|\leqslant\eta} \varphi_n(t)\,|f(x-t)-f(x)|\,\mathrm{d}t + \int_{|t|>\eta} \varphi_n(t)\,|f(x-t)-f(x)|\,\mathrm{d}t.$$

Étudions chacun des termes de la somme. Pour le premier terme, on a

$$\int_{|t|\leqslant\eta} \varphi_n(t)\,|f(x-t)-f(x)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_{|t|\leqslant\eta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

Pour le second terme, on considère $a > 0$ tel que $\operatorname{Supp}\varphi \subset [\,-a\,,a\,]$. Pour $n \geqslant a\eta^{-1}$ et $|t| > \eta$, on a $|nt| > a$ et donc $nt \notin \operatorname{Supp}\varphi$. On en déduit que $\varphi_n(t) = n\varphi(nt) = 0$ pour tout $|t| > \eta$. Ainsi, pour $n \geqslant a\eta^{-1}$, le second terme est nul. Finalement

$$\forall\, n \geqslant a\eta^{-1}, \qquad |(\varphi_n * f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 2 — Translatées et dimension finie. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on désigne par $\mathscr{C}^k$ l'espace vectoriel des fonctions k fois continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

a) Soit $f \in \mathscr{C}^\infty$; on note $\mathcal{D}_f = \mathrm{vect}\,(f^{(k)},\ k \geqslant 0)$ le sous-espace de $\mathscr{C}^\infty$ engendré par les dérivées successives de la fonction f. Pour quelles fonctions f, $\mathcal{D}_f$ est-il de dimension finie ?

b) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie n de $\mathscr{C}^0$. Notons, pour $x \in \mathbb{R}$, δ_x la forme linéaire sur E définie par $\delta_x(f) = f(x)$. Montrer qu'il existe une base de E^* de la forme $(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$. Montrer que si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E alors $\det\big((f_i(x_j))_{ij}\big) \neq 0$.

c) Pour $f \in \mathscr{C}^0$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on définit la translatée f_τ par $f_\tau(x) = f(x - \tau)$. Considérons $\mathcal{T}_f$ le sous-espace de $\mathscr{C}^0$ engendré par les f_τ pour $\tau \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_f = \mathrm{vect}\,(f_\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}).$$

Soit f une fonction telle que $\dim(\mathcal{T}_f) = n$. Montrer qu'il existe $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$ et une famille $(a_1, \ldots, a_n)$ de fonctions telles que :

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R}, \qquad f_\tau = \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau)\, f_{\tau_i}. \tag{$*$}$$

d) Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On suppose que $f \in \mathscr{C}^k$ et que $\dim(\mathcal{T}_f) < +\infty$. Montrer que les a_i de la question **c** sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

e) On suppose que $f \in \mathscr{C}^0$ et que $\dim(\mathcal{T}_f) < +\infty$. En utilisant un argument de convolution, montrer que les fonctions a_i de la question **c** sont $\mathscr{C}^\infty$.

f) En déduire que si $\dim(\mathcal{T}_f) < +\infty$, f est $\mathscr{C}^\infty$. Quelles sont les fonctions f telles que $\dim(\mathcal{T}_f) < +\infty$?

Commentaires. Cet exercice mélange des arguments d'algèbre linéaire et d'analyse fonctionnelle pour étudier des sous-espaces de fonctions continues vérifiant des conditions de natures algébrique et différentielle. Le principal outil est la structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants (voir [RDO4, 5.2.3]). Pour exploiter cette propriété, on démontre que les opérateurs de dérivation et de convolution commutent avec la translation.

Corrigé.

a) Montrons que l'espace $\mathcal{D}_f$ est de dimension finie si, et seulement si, il existe n nombres complexes $(c_1, \ldots, c_n)$ tels que

$$f^{(n)} + c_1 f^{(n-1)} + \ldots + c_n f = 0. \tag{$**$}$$

Commençons par démontrer le sens direct. Si $\dim(\mathcal{D}_f) = p < +\infty$, alors la famille $(f, f', \ldots, f^{(p)})$ de $\mathcal{D}_f$ est liée : il existe des nombres complexes λ_i tels que

$$\lambda_p f^{(p)} + \lambda_{p-1} f^{(p-1)} + \cdots + \lambda_0 f = 0.$$

Soit n le plus grand i tel que $\lambda_i \neq 0$. On obtient $(**)$ en posant $c_i = \lambda_{n-i}/\lambda_n$.

Réciproquement, on suppose que f vérifie $(**)$. Montrons que $\mathcal{D}_f$ est engendré par $\mathcal{B} = \{f, \ldots, f^{(n-1)}\}$. Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ pour montrer que $f^{(k)}$ s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. Cette propriété est vraie pour $k = 0, \ldots, n-1$. On suppose que cette propriété est vraie jusqu'à un rang $k \geqslant n-1$. Alors l'expression $(**)$ entraîne

$$f^{(k+1)} = \big(f^{(n)}\big)^{(k+1-n)} = -c_1 f^{(k)} - \cdots - c_n f^{k+1-n}.$$

Ceci permet de conclure grâce à l'hypothèse de récurrence.

Le théorème [RDO4, 5.2.3] affirme que les f vérifiant $(**)$ sont exactement les fonctions qui s'écrivent sous la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(t) \exp(\lambda_i t) \qquad \text{avec } \ \mathrm{P}_i \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Ainsi ces fonctions sont exactement les fonctions f telles que $\dim(\mathcal{D}_f) < +\infty$.

b) D'après le théorème de la base incomplète, il suffit de montrer que la famille $(\delta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ est une famille génératrice de E^*. Utilisons pour cela un argument de dualité. Observons que l'orthogonal (dual) de la famille $(\delta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ est réduit à 0. En effet, soit f telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\delta_x(f) = 0$; alors $\delta_x(f) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f = 0$. Comme E est de dimension finie n, la proposition III de [RDO1, 9.3.6.3r] implique que la dimension de l'espace vectoriel engendré par $(\delta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ est égale à n moins la dimension de son orthogonal. Ainsi il est de dimension n, et donc la famille est génératrice.

Soit à présent $\mathcal{B} = (g_1, \ldots, g_n)$ la base de E duale de $(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$. On considère $\mathcal{B}_1 = (f_1, \ldots, f_n)$ une base quelconque de E. On note A la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ qui est inversible. Comme $\mathcal{B}$ est la base duale de $(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$, elle vérifie $g_j(x_i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. On a ainsi

$$f_i(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, g_k(x_j) = a_{ij},$$

de sorte que $\det(f_i(x_j)) = \det(\mathrm{A}) \neq 0$.

c) Comme $\mathcal{T}_f$ est un espace vectoriel de dimension finie engendré par les f_τ, le théorème de la base incomplète montre qu'il existe une base de cet espace de la forme $(f_{\tau_1}, \ldots, f_{\tau_n})$. Donc pour tout τ, il existe une unique famille $(a_i(\tau))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, telle que

$$f_\tau = \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau) f_{\tau_i}.$$

d) Il s'agit de montrer que les fonctions a_i ainsi définies ont la même régularité que f. Comme l'espace vectoriel $\mathcal{T}_f$ est de dimension finie, on peut appliquer les résultats de la question **b**, ce qui permet de définir une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ telle que la matrice $\mathrm{A} = (f_{\tau_i}(x_j))_{i,j}$ soit inversible. En évaluant f_τ aux points x_j, on a alors

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R}, \qquad f_\tau(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau) f_{\tau_i}(x_j).$$

Cette égalité signifie que $(a_1(\tau), \ldots, a_n(\tau))$ vérifie le système linéaire

$$\begin{bmatrix} f_{\tau_1}(x_1) & \cdots & f_{\tau_1}(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\tau_n}(x_1) & \cdots & f_{\tau_n}(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(\tau) \\ \vdots \\ a_n(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1 - \tau) \\ \vdots \\ f(x_n - \tau) \end{bmatrix}.$$

D'après la question **b**, on a $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. L'inversibilité de A permet de poser $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1} = (b_{ij})_{i,j}$. En inversant le système linéaire précédent, on trouve

$$a_i(\tau) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, f(x_j - \tau),$$

ce qui montre que les a_i s'écrivent comme combinaisons linéaires des $\tau \mapsto f(x_i - \tau)$. Comme f est $\mathscr{C}^k$, pour tout i les fonctions $\tau \mapsto f(x_i - \tau)$ sont $\mathscr{C}^k$, ce qui montre que les a_i sont des fonctions $\mathscr{C}^k$.

e) Soit θ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact positive dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1 (voir l'application 3.58 pour la construction d'une telle fonction). On construit à partir de θ une identité approchée $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme à l'exemple 3.62. L'application f est continue donc localement intégrable. Ainsi, d'après la question **a** de l'exercice 1, $\theta_k * f$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par ailleurs, la convolution commute avec les translations, autrement dit $(\theta_k * f)_\tau = (\theta_k * f_\tau)$. En effet,

$$(\theta_k * f)_\tau\,(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta_k(u) f\left((x-\tau) - u\right)\, \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \theta_k(u) f_\tau(x-u)\,\mathrm{d}u = (\theta_k * f_\tau)\,(x).$$

Grâce à la linéarité de la convolution, on peut alors calculer $(\theta_k * f)_\tau$:

$$(\theta_k * f)_\tau = \theta_k * f_\tau = \theta_k * \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\tau)\, f_{\tau_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau)\,(\theta_k * f_{\tau_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau)\,(\theta_k * f)_{\tau_i}.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{T}_{\theta_k * f}$ est donc de dimension finie engendré par les $(\theta_k * f)_{\tau_i}$. La question **b** de l'exercice 1 montre que la matrice $\mathrm{A}_k = [\theta_k * f_{\tau_i}(x_j)]_{i,j}$ tend vers la matrice inversible $[f_{\tau_i}(x_j)]_{i,j}$ lorsque k tend vers $+\infty$. La continuité du déterminant assure l'existence d'un k_0 tel que $\det(\mathrm{A}_k) = \det\,[\delta_{x_j}(\theta_k * f_{\tau_i})]_{i,j}$ est non nul, pour $k \geqslant k_0$. La linéarité des δ_{x_j} assure alors que les $\theta_{k_0} * f_{\tau_i}$ forment une famille libre et donc une base de $\mathcal{T}_{\theta_{k_0} * f}$. Par ailleurs, les coordonnées de $(\theta_{k_0} * f)_\tau$ dans cette base sont les $a_i(\tau)$. En appliquant la question **d** à la fonction $\theta_{k_0} * f$, on obtient que les a_i sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

f) Soit f tel que $\dim(\mathcal{T}_f) < +\infty$, montrons que f est $\mathscr{C}^\infty$. En évaluant $f_{-\tau}$ en 0 et en utilisant la relation $(*)$, on obtient

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R}, \qquad f(\tau) = f_{-\tau}(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i(-\tau)\, f_{\tau_i}(0) = \sum_{i=1}^{n} f(-\tau_i)\, a_i(-\tau).$$

Comme les fonctions a_i sont $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit que f l'est aussi. Observons que la dérivation commute avec la translation, c'est-à-dire que

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R}, \qquad \left(f^{(k)}\right)_\tau = (f_\tau)^{(k)}.$$

Terminons en montrant l'équivalence

$$\dim(\mathcal{T}_f) < +\infty \iff \dim(\mathcal{D}_f) < +\infty \iff f(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(t) \exp(\lambda_i t).$$

La deuxième équivalence a fait l'objet de la question **a**. Montrons que si f vérifie $\dim(\mathcal{T}_f) < +\infty$ alors $\dim(\mathcal{D}_f) < +\infty$. En dérivant k fois la relation $(*)$, on obtient :

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R}, \qquad \left(f^{(k)}\right)_{-\tau} = (f_{-\tau})^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(-\tau) {f_{\tau_i}}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(-\tau) \left(f^{(k)}\right)_{\tau_i}.$$

En évaluant $\left(f^{(k)}\right)_{-\tau}$ en 0, on a donc

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R}, \qquad f^{(k)}(\tau) = \left(f^{(k)}\right)_{-\tau}(0) = \sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(-\tau_i)\, a_i(-\tau).$$

Ceci montre que toutes les dérivées de f sont dans l'espace engendré par les fonctions $\tau \mapsto a_i(-\tau)$, ce qui montre que $\dim(\mathcal{D}_f) < +\infty$.

Réciproquement, on suppose que $\dim(\mathcal{D}_f) < +\infty$, et on écrit f comme

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(t) \exp(\lambda_i t). \qquad (***)$$

On constate que si $g, h \in \mathscr{C}^0$ et $\mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{T}_{g+h} \subset \mathcal{T}_g + \mathcal{T}_h \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_{\mu g} = \mathcal{T}_g,$$

de sorte que si $\mathcal{T}_g$ et $\mathcal{T}_h$ sont de dimension finie, alors $\mathcal{T}_{g+h}$ et $\mathcal{T}_{\mu g}$ le sont aussi. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $f_{\lambda,n} \colon x \mapsto x^n \exp(\lambda\, x)$. La relation $(***)$ implique qu'il suffit de montrer que $\mathcal{T}_{f_{\lambda,n}}$ est de dimension finie pour conclure. On observe alors que $\mathcal{T}_{f_{\lambda,n}}$ est engendré par les $f_{\lambda,k}$ pour $k = 0, \ldots, n$. Finalement, on a l'équivalence escomptée.

Références

[RDO1] E. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux. *Cours de Mathématiques 1, Algèbre*. Dunod, 1998.

[RDO4] E. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux. *Cours de Mathématiques 4, Séries et équations différentielles*. Dunod, 1998.

[RUD] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 1987.