

### Motivations.

La section 5.1 du livre Objectif Agrégation qui présente la notion de quotient insiste sur les deux points fondamentaux :

- la surjection canonique,
- la propriété universelle appelée aussi propriété de factorisation.

La sous-section 5.1.3 en particulier étudie les quotients pour les structures algébriques. Si  $E$  est muni d'une structure algébrique et d'une « bonne » relation d'équivalence, alors la surjection canonique respecte cette structure : c'est un morphisme pour la structure considérée. Et, lorsque que l'on souhaite faire passer au quotient un morphisme, la propriété universelle permet de créer une application partant du quotient qui est elle-aussi un morphisme (voir les théorèmes 5.13 et 6.17).

Cette courte note commente un résultat analogue lorsque l'on ne fait plus de l'algèbre mais de la topologie, c'est-à-dire lorsque l'on considère un espace topologique  $E$  muni d'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  et que l'on remplace « morphisme » par « application continue ». L'objectif de ce texte est d'expliquer pourquoi la topologie appelée *topologie quotient* est la « bonne » topologie sur  $E/\mathcal{R}$  c'est-à-dire celle qui réalise deux objectifs :

- on souhaite que, grâce à la topologie sur  $E/\mathcal{R}$ , la surjection canonique soit continue ;
- on veut que la propriété universelle soit vérifiée : pour tout espace topologique  $F$  et toute application  $f : E \rightarrow F$  continue compatible avec  $\mathcal{R}$ , alors l'unique application obtenue par passage au quotient est continue.

### Topologie quotient.

Soient  $(E, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$  et  $\pi : E \mapsto E/\mathcal{R}$  la surjection canonique. Rappelons la définition de la continuité (voir [CCM, I.3.3] ou [CHO, V.2.7]). Soient  $(E, \mathcal{T})$  et  $(F, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques, une application  $f : E \rightarrow F$  est continue si

$$\forall U \in \mathcal{T}', \quad f^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } (E, \mathcal{T}).$$

Une idée à retenir est qu'une structure topologique est plus « souple » qu'une structure algébrique. En effet, on va voir qu'il n'y a pas à se restreindre à des relations d'équivalence particulières (contrairement au cas des structures algébriques, voir [BPM, p.234]). De plus, cette souplesse fait qu'en général plusieurs topologies rendent continue la surjection canonique. En effet, d'après la définition rappelée ci-dessus,  $\pi$  est continue si la topologie  $\tau$  sur  $E/\mathcal{R}$  vérifie

$$U \in \tau \implies \pi^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } E. \quad (*)$$

Exhibons deux topologies vérifiant cette propriété :

- (i) la topologie grossière : les ouverts sont simplement  $\emptyset$  et  $E/\mathcal{R}$ . Comme  $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  et  $\pi^{-1}(E/\mathcal{R}) = E$ , elle vérifie (\*). C'est la topologie la moins fine sur  $E/\mathcal{R}$  : toute topologie contient ces ouverts.
- (ii) la topologie  $\tau$  définie par

$$\tau = \{U \subset E/\mathcal{R}, \quad \pi^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } E\}.$$

On démontre, grâce aux propriétés de l'image réciproque vis-à-vis des intersections et réunions, que  $\tau$  est bien une topologie (voir [CCM, Chap II]). Par définition, elle rend continue la surjection canonique. C'est même la topologie la plus fine (c'est-à-dire avec le plus d'ouverts) qui rend continue la surjection canonique.

Ainsi, la continuité de  $\pi$  n'est pas suffisante pour définir (de façon unique) une topologie sur  $E/\mathcal{R}$  qui rende continue la surjection canonique, contrairement à la situation analogue en algèbre pour laquelle, lorsque l'on impose à  $\pi$  d'être un morphisme, la structure algébrique sur  $E/\mathcal{R}$  est entièrement définie.

Pour régler ce problème de « choix » de la topologie, on fait appel à la deuxième propriété souhaitée : la propriété de factorisation. Comme on souhaite que la topologie sur  $E/\mathcal{R}$  rende continues les applications obtenues par passage au quotient d'applications continues, on veut que  $E/\mathcal{R}$  ait beaucoup d'ouverts. Pour ceci, on choisit sur  $E/\mathcal{R}$  la topologie la plus fine possible telle que  $\pi$  soit continue c'est-à-dire la topologie (ii). Avec cette topologie, la propriété de factorisation est effectivement vérifiée.

**Proposition 1 – Factorisation.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces topologiques,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$  et  $f : E \rightarrow F$  une application continue compatible avec  $\mathcal{R}$ . Si  $E/\mathcal{R}$  est muni de la topologie (ii), alors l'unique application  $\tilde{f}$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ E/\mathcal{R} & & \end{array}$$

est continue.

**Preuve.** L'existence et l'unicité de l'application  $\tilde{f}$  sont données par le théorème général de passage au quotient. Il reste juste à voir qu'elle est continue. Soit  $V$  est un ouvert de  $F$ . Alors  $\tilde{f}^{-1}(V)$  est un ouvert de  $E/\mathcal{R}$  puisque  $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$  est un ouvert de  $E$ .

## Bilan.

Bref, un équilibre est atteint entre deux phénomènes « allant en sens contraire ».

- On veut rendre continue la surjection canonique (qui est à valeurs dans  $E/\mathcal{R}$ ). Pour ceci, il faut « prendre peu d'ouverts » sur  $E/\mathcal{R}$ . On cherche donc une topologie peu fine.
- On souhaite que les applications obtenues par passage au quotient d'applications continues soient encore continues. Cela impose de « prendre beaucoup d'ouverts » pour rendre continue le maximum d'applications partant de  $E/\mathcal{R}$ .

Ainsi, il est naturel de choisir la topologie la plus fine rendant continue la surjection canonique. On appelle cette topologie, *la topologie quotient*. Le quotient  $E/\mathcal{R}$  muni de cette topologie vérifie ainsi les deux propriétés fondamentales.

## Références

- [BPM] V. BECK, J. MALICK, et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H & K, 2004.
- [CCM] G. CHRISTOL, A. COT, et C.-M. MARLE. *Topologie*. Ellipses, 1997.
- [CHO] G. CHOQUET. *Cours d'analyse, Tome 2, Topologie*. Masson et C<sup>ie</sup>, 1973.