

# TABLE DES MATIÈRES

## 1 CALCUL DIFFÉRENTIEL

1.1	Différentiabilité . . . . .	1
1.1.1	Applications différentiables . . . . .	2
1.1.2	Lemme fondamental de composition . . . . .	6
1.1.3	Inégalité des accroissements finis . . . . .	7
1.1.4	Utilisations de la différentielle . . . . .	8
1.2	Inversion locale et fonctions implicites . . . . .	9
1.2.1	Fonctions inverses, fonctions implicites . . . . .	10
1.2.2	Applications . . . . .	11
1.2.3	Généralisations . . . . .	13
1.3	Optimisation . . . . .	15
1.3.1	Existence et unicité . . . . .	16
1.3.2	Localisation et calcul différentiel . . . . .	16
1.3.3	Optimisation numérique . . . . .	22
1.4	Développements de Taylor . . . . .	24
1.4.1	Développement local . . . . .	24
1.4.2	Développement global . . . . .	25
1.5	Fonctions convexes . . . . .	26
1.5.1	Ensembles convexes . . . . .	26
1.5.2	Fonctions convexes . . . . .	27
1.5.3	Fonctions convexes différentiables . . . . .	28
1.5.4	Fonctions convexes et optimisation . . . . .	30
1.6	Exercices . . . . .	30

## 2 FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

2.1	Séries entières . . . . .	47
2.1.1	Rayon de convergence . . . . .	47
2.1.2	Au bord du disque de convergence . . . . .	49
2.2	Fonctions analytiques . . . . .	51
2.2.1	Fonctions développables en série entière . . . . .	51

2.2.2	Factorisation . . . . .	51
2.2.3	Théorème des zéros isolés . . . . .	53
2.2.4	Fonctions analytiques réelles . . . . .	54
2.3	Fonctions holomorphes . . . . .	56
2.3.1	Holomorphicité VS calcul différentiel réel . . . . .	56
2.3.2	Applications conformes . . . . .	58
2.3.3	Fonctions holomorphes et inversion locale . . . . .	61
2.4	Conséquences de la théorie de Cauchy . . . . .	62
2.4.1	Formule de Cauchy . . . . .	62
2.4.2	Lien holomorphicité – développements en série . . . . .	63
2.4.3	Résidus . . . . .	66
2.4.4	Holomorphicité sous le signe somme . . . . .	67
2.4.5	Familles de fonctions holomorphes . . . . .	69
2.5	Fonctions harmoniques . . . . .	71
2.5.1	Harmonicité et holomorphicité . . . . .	71
2.5.2	Harmonicité et propriété de la moyenne . . . . .	72
2.5.3	Principe du maximum . . . . .	72
2.6	Compléments . . . . .	73
2.6.1	L’anneau des fonctions holomorphes . . . . .	73
2.6.2	Algèbre de Banach complexe . . . . .	74
2.6.3	Déterminations . . . . .	74
2.7	Exercices . . . . .	77

### 3 ANALYSE FONCTIONNELLE

3.1	Analyse hilbertienne . . . . .	91
3.1.1	Espace muni d’un produit scalaire . . . . .	91
3.1.2	Théorème de projection . . . . .	95
3.1.3	Dualité . . . . .	103
3.1.4	Bases hilbertiennes . . . . .	107
3.1.5	Polynômes orthogonaux . . . . .	110
3.1.6	Compléments . . . . .	112
3.2	Convolution . . . . .	113
3.2.1	Propriétés de la convolution . . . . .	114
3.2.2	Convolution et régularisation . . . . .	116
3.2.3	Identités approchées . . . . .	119
3.3	Séries de Fourier . . . . .	122
3.3.1	Aspect hilbertien . . . . .	123
3.3.2	Algèbre de convolution $L^1(\mathbb{T})$ . . . . .	125
3.3.3	Convergence au sens de Cesàro . . . . .	127
3.3.4	Convergence ponctuelle . . . . .	129
3.3.5	Régularité et estimation . . . . .	131
3.3.6	Applications . . . . .	132
3.4	Exercices . . . . .	133

## 4 ALGÈBRE LINÉAIRE

4.1	Théorie de la dimension . . . . .	148
4.1.1	Bases et dimension . . . . .	148
4.1.2	Dimension et applications linéaires . . . . .	151
4.1.3	Théorème du rang . . . . .	153
4.1.4	Rang et matrices équivalentes . . . . .	155
4.1.5	Calcul du rang . . . . .	156
4.2	Réduction des endomorphismes . . . . .	157
4.2.1	Sous-espaces stables . . . . .	158
4.2.2	Polynômes et endomorphismes . . . . .	161
4.2.3	Polynômes annulateurs et réduction . . . . .	165
4.2.4	Réductions simultanées . . . . .	167
4.3	Endomorphismes remarquables . . . . .	168
4.3.1	Endomorphismes nilpotents . . . . .	168
4.3.2	Endomorphismes cycliques . . . . .	174
4.3.3	Endomorphismes diagonalisables . . . . .	176
4.4	D'autres outils d'algèbre linéaire . . . . .	180
4.4.1	Déterminant . . . . .	180
4.4.2	Opérations élémentaires . . . . .	185
4.4.3	Une méthode . . . . .	188
4.5	Codes Correcteurs . . . . .	189
4.5.1	Notion de code correcteur . . . . .	189
4.5.2	Distance et séparation des mots . . . . .	191
4.5.3	Codes cycliques . . . . .	192
4.6	Exercices . . . . .	194

## 5 ALGÈBRE COMMUTATIVE

5.1	Quotient . . . . .	231
5.1.1	Surjection canonique . . . . .	231
5.1.2	Passage au quotient . . . . .	232
5.1.3	Quotients et structures algébriques . . . . .	233
5.2	Anneaux . . . . .	236
5.2.1	Morphismes d'anneaux . . . . .	236
5.2.2	Anneaux euclidiens . . . . .	238
5.2.3	Divisibilité . . . . .	239
5.3	Théorème chinois . . . . .	241
5.3.1	Autour du théorème chinois . . . . .	241
5.3.2	Factorisation de polynômes . . . . .	244
5.4	Exercices . . . . .	249

## 6 MODULES

6.1	Structure de module . . . . .	254
6.1.1	Modules sur un anneau . . . . .	254
6.1.2	Morphismes de $A$ -modules . . . . .	256
6.1.3	Sous-modules . . . . .	257
6.1.4	Module quotient . . . . .	259
6.2	Changement d'anneau de base . . . . .	263
6.2.1	Restriction des scalaires . . . . .	263
6.2.2	Lien entre $A$ -modules et $A/I$ -modules . . . . .	264
6.2.3	$A[X]$ -modules et $A$ -modules . . . . .	266
6.2.4	Lorsque $A$ est un corps . . . . .	269
6.3	Familles génératrices, familles libres . . . . .	270
6.3.1	Définitions . . . . .	270
6.3.2	Modules de type fini . . . . .	272
6.3.3	Modules libres . . . . .	274
6.4	Modules de type fini sur un anneau principal . . . . .	275
6.4.1	Approche théorique . . . . .	276
6.4.2	Approche matricielle . . . . .	285
6.4.3	Lien entre les deux approches . . . . .	289
6.5	Réduction des endomorphismes . . . . .	292
6.5.1	Invariants de similitude . . . . .	293
6.5.2	Réduction de Jordan . . . . .	304
6.6	Exercices . . . . .	307
Bibliographie . . . . .		329
Index . . . . .		331